

无网格方法关于导数计算的程序验证

马智博¹, 赵亚洲²
(1. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094;
2. 中国科学院 地质与地球物理研究所, 北京 100029)

摘 要: 为了提高无网格方法对空间导数的数值计算能力, 提出并论证了新的适用于直角坐标系、柱坐标系和球坐标系的空间导数无网格算法。基于数值解与理论解的对比分析, 对数值误差和收敛性进行了后验评估。评估结果表明: 该算法对函数和导数的估计均为 2 阶精度, 支撑域尺度对数值误差的大小有一定影响, 但不影响数值计算的精度等级。在离散尺度 h 为 0.01 的条件下, 对所选函数及其导数的数值计算相对误差不大于 0.65%。

关 键 词: 无网格方法; 光滑粒子法; 物理质团法; 空间导数近似计算; 验证与确认

中图分类号: V23; O242.1 **文献标志码:** A

Code verification of mesh free method with computation of derivatives

MA Zhibo¹, ZHAO Yazhou²

(1. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China;
2. Institute of Geology and Geophysics,
Chinese Academy of Science, Beijing 100029, China)

Abstract: In order to improve the approximation of spatial derivatives without meshes, a set of mesh free method for spatial derivatives was developed, which agreed well with the Cartesian, cylindrical and spherical coordinates. Based on the comparisons between numerical and theoretical solutions, the errors and convergences were assessed by a posteriori method, showing that the approximations for functions and derivatives were of the second order accurate, and the scale of the support domain had some influences on numerical errors but not on accuracy orders. With a discrete scale h being 0.01, the relative errors of the numerical simulation for the selected functions and their derivatives were within 0.65%.

Key words: mesh free method; smoothed particle hydrodynamics; physics evoked cloud method; approximation of spatial derivative; verification and validation

对函数及其空间导数的近似计算是无网格数值方法求解偏微分方程的技术关键^[1-3]。该项技术主要关心计算格式的相容性、稳定性和收敛性, 可结合程序验证(code verification)过程来完成其可信性评估。程序验证的主要目的是检验数值算法及其对应的程序代码的正确性。由于数值计算

收稿日期:2016-11-18
基金项目:国家自然科学基金(11371066)
作者简介:马智博(1963—),男,研究员,博士,主要从事计算物理、可靠性理论与工程研究。
引用格式:马智博,赵亚洲. 无网格方法关于导数计算的程序验证[J]. 航空动力学报,2017,32(8):1886-1899. MA Zhibo,ZHAO Yazhou. Code verification of mesh free method with computation of derivatives[J]. Journal of Aerospace Power,2017,32(8):1886-1899.

所涉及的数学模型通常比较复杂,基于数学理论的先验(a priori)分析方法通常会遇到较大困难,因而常借助数值解与高可信度参照解的对比信息,采用后验(a posteriori)分析方法完成数值模拟的程序验证^[4-5]。在已有的基于核估计思想的无网格算法研究中,所涉及的导数计算大多局限于直角坐标系或比较简单的导数形式,其后验评估一般也基于定性或半定量的对比分析^[6-17]。

无网格方法的应用范围在不断拓展,所面对的实体模型可能具有不同的对称特性,数值计算需要能够面对不同的坐标系类型。对涉及流体、固体和传热传质等复杂过程的数值模拟,需要具有梯度、散度、旋度等 1 阶空间导数以及拉普拉斯算符和耗散项等 2 阶空间导数的数值计算能力。在数值模拟可信度评估方面,V&V(验证与确认)技术的不断发展,也为基于定性分析和定量分析的综合评估提供了越来越多的技术支持,其中对收敛精度等级的量化评估已成为收敛性分析的重要技术内容^[18-20]。

对函数及其导数的无网格数值计算,在工程应用上有 3 个方面的期望:其一是相容、收敛且具有所需的精度等级;其二是能够适应不同的坐标系;其三是简捷高效且容易编程。Gingold 和 Monaghan 提出的 SPH(smoothed particle hydrodynamics)方法基于核估计思想构造数值逼近格式,该格式结构简单且与被逼近的函数形式无关,有利于快速求解包含多个未知量的微分方程组^[1]。Liu 等根据支撑域内近邻粒子的体积和位置信息,对 SPH 的核函数进行了校正,提出了 RKPM(reproducing kernel particle method)方法,提高了边界点或内点的核估计精度^[8]。用核函数的 1 阶导数对未知 1 阶导数进行近似估计时,一般可以给出比较好的逼近精度,但如果把核函数的 2 阶导数直接用于估计未知的 2 阶导数,无论采用 SPH 还是 RKPM 的核函数,逼近精度都明显下降^[16]。

对任意函数的 2 阶导数,Brookshaw 借鉴有限差分的思想,提出了精度较高的基于核函数 1 阶导数的近似逼近方法,并给出了直角坐标系下针对拉普拉斯算符的核估计算法^[21]。基于类似思想,Cleary, Zhang 和 Basa 等在传热和黏性流的模拟中给出了直角坐标系下包括耗散项等 2 阶导数的核估计算法^[22-24]。为了拓展无网格方法对包含多种物质类型的复杂物理过程的模拟能力,本文作者马智博提出了名为 PECM(physics e-

voked cloud method)的无网格方法,并借用核估计的数值逼近方法,阐述了该方法的设计思想和数值格式。其中对常用的 1 阶和 2 阶导数形式提出了简捷高效且同时适应于直角坐标系、柱面坐标系和球面坐标系的无网格算法,并基于这些新的算法发展了适合多物理复杂过程的无网格数值模拟软件 HAUC(how are universes cuddling)^[25]。

本文首先对 HAUC 软件中的导数计算格式进行理论推导,然后用后验分析的方法对格式的相容性、收敛性以及收敛的精度等级进行评估。基于任意给定的函数类型,通过数值解与精确解的一致性以及误差范数随离散尺度按幂方规律递减的观测结果,以定性和半定量的方式评估数值格式的收敛性,然后基于误差范数,对数值格式的精度等级进行定量评估,并在结论中给出程序验证的评估结果。

1 函数及其空间导数的无网格近似

1.1 无网格计算格式

无网格方法通过支撑域内离散单元的函数信息来估计某个空间位置上的函数及其导数。在计算数学和应用物理等领域中,常用的导数一般不高于 2 阶,它们的无网格近似估计可统一表示为函数本身

$$f(\xi) |_{\xi=i\xi} \approx \sum_{j=1}^N \psi f(j\xi) \quad (1)$$

1 阶导数

$$\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_\alpha} |_{\xi=i\xi} \approx \sum_{j=1}^N \psi_\alpha f(j\xi) \quad (2)$$

2 阶导数

$$\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} |_{\xi=i\xi} \approx \sum_{j=1}^N \psi_{\alpha\beta} f(j\xi) \quad (3)$$

式(1)~式(3)也适用于矢量形式的函数 $f(j\xi)$,其右端项的输入信息均为散布于空间上的函数值。离散单元 i 的支撑域内共含 N 个离散单元, j 为该支撑域内离散单元的编号。矢量 ξ 为离散单元的坐标, α 和 β 表示坐标的分量。对直角坐标系,3 个坐标分量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 为 x, y, z 。对柱坐标系和球坐标系,坐标分量分别为 r, z, θ ($0 \leq r < \infty, -\infty < z < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi$) 和 r, θ, φ ($0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$)。

根据 V&V 的技术规范,程序验证的目的就是检验无网格方法是否选择了正确的 $^i\psi, ^j\psi_\alpha$ 和 $^j\psi_{\alpha\beta}$,并把离散表达式正确地表现在程序代码

中,以保证对函数和导数的近似计算满足预期需求。本文涉及到的原函数和导数类型分别有标量函数 $f(\xi), \lambda(\xi), \phi(\xi)$ 、矢量函数 $\mathbf{V}(\xi)$ (其 3 个坐标分量为 $V_1(\xi), V_2(\xi)$ 和 $V_3(\xi)$)、梯度 $\nabla f(\xi)$ 、旋度 $\nabla \times \mathbf{V}(\xi)$ 、散度 $\nabla \cdot \mathbf{V}(\xi)$ 、拉普拉斯算符 $\Delta f(\xi)$ 以及耗散项 $\nabla \cdot [\lambda(\xi) \nabla \phi(\xi)]$ 。

针对以上函数及导数形式,马智博在 HAUC 中提出了如下计算格式

$$\langle f(i\xi) \rangle = \sum_{j=1}^N b_j f(j\xi) \cdot W_{ij}^{(\text{RKPM})} \quad (4)$$

$$\langle \nabla f(i\xi) \rangle = \sum_{j=1}^N b_j f(j\xi) \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla \times \mathbf{V}(i\xi) \rangle = \\ \sum_{j=1}^N b_j [\mathbf{V}(i\xi) - \mathbf{V}(j\xi)] \times \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{V}(i\xi) \rangle = \\ \sum_{j=1}^N b_j [\mathbf{\Omega}_{ij} : \mathbf{V}(j\xi) - \mathbf{V}(i\xi)] \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta f(i\xi) \rangle = \sum_{j=1}^N 2b_j [f(i\xi) - f(j\xi)] \cdot \\ [({}^1\mathbf{\Omega}_{ij} : \mathbf{r}_{ij}) \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})}] / r_{ij}^2 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot [\lambda(i\xi) \nabla \phi(i\xi)] \rangle = \sum_{j=1}^N b_j [\lambda(i\xi) + \lambda(j\xi)] \cdot \\ [\phi(i\xi) - \phi(j\xi)] [({}^1\mathbf{\Omega}_{ij} : \mathbf{r}_{ij}) \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})}] / r_{ij}^2 \end{aligned} \quad (9)$$

式(7)~式(9)中 b_j 为支撑域内第 j 个微元体的体积; $W_{ij}^{(\text{RKPM})}$ 为 RKPM 方法中微元体 i 和 j 之间的核函数;“:”是一个特定的矢量算符,如对矢量 $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], \boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$,则

$$\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\beta} = [\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2, \alpha_3 \beta_3] \quad (10)$$

各变量的定义同文献[25],其中 $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ 为 i, j 两个离散单元之间坐标位置的矢量差。矢量 ${}^m\mathbf{\Omega}_{ij}$ ($m=1, 2$) 的取值为

$${}^m\mathbf{\Omega}_{ij} = \begin{cases} \left[\left(\frac{j\xi_1}{i\xi_1} \right)^{0m}, 1, 0, 1, 0 \right] & \text{直角坐标系} \\ \left[\left(\frac{j\xi_1}{i\xi_1} \right)^{0.5m}, 1, 0, 0 \right] & \text{柱坐标系} \\ \left[\left(\frac{j\xi_1}{i\xi_1} \right)^{1.0m}, 0, 0 \right] & \text{球坐标系} \end{cases} \quad (11)$$

式(11)适用于直角坐标系下的一维、二维和三维问题,柱坐标下的一维和二维问题,以及球坐标下的一维问题。在柱坐标和球坐标下, ξ_1 对应于径向坐标且满足 $0 \leq \xi_1 < \infty$ 。

1.2 计算格式的推导

1.2.1 理论基础

早期的文献已经完成了 SPH 方法对梯度、散度和旋度等 1 阶导数近似格式的推导。其基本思想是通过分部积分和高斯公式,再结合核函数在支撑域内的紧致性,将对目标函数的导数计算转变为对已知核函数的导数计算。当采用 RKPM 核函数时,对应的散度计算格式为

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{V}(i\xi) \rangle = \\ \sum_{j=1}^N b_j [\mathbf{V}(j\xi) - \mathbf{V}(i\xi)] \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})} \end{aligned} \quad (12)$$

对涉及 2 阶导数的算符,更加精确的 Brookshaw 格式可表示为

$$\begin{aligned} \langle \Delta f(i\xi) \rangle = \sum_{j=1}^N 2b_j [f(i\xi) - f(j\xi)] \cdot \\ [\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})}] / r_{ij}^2 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot [\lambda(i\xi) \nabla \phi(i\xi)] \rangle = \\ \sum_{j=1}^N b_j [\lambda(i\xi) + \lambda(j\xi)] [\phi(i\xi) - \phi(j\xi)] \cdot \\ (\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})}) / r_{ij}^2 \end{aligned} \quad (14)$$

式(4)~式(6)不随坐标系类型的变化而变化,其推导过程可见早期的文献[1, 8]。式(7)~式(9)涉及散度、拉普拉斯算符和耗散项的计算,其计算格式与所选正交坐标系的类型有关。

如仅考虑柱坐标的 ξ_1 方向,有

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial (\xi_1 v_{\xi_1})}{\xi_1 \partial \xi_1} \quad (15)$$

$$\Delta f = \frac{1}{\xi_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\xi_1 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \right) \quad (16)$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla \phi) = \frac{1}{\xi_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\xi_1 \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} \right) \quad (17)$$

如仅考虑球坐标的 ξ_1 方向,有

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial (\xi_1^2 v_{\xi_1})}{\xi_1^2 \partial \xi_1} \quad (18)$$

$$\Delta f = \frac{1}{\xi_1^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\xi_1^2 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \right) \quad (19)$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla \phi) = \frac{1}{\xi_1^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\xi_1^2 \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} \right) \quad (20)$$

对实际问题进行数值模拟时,能够通过选择恰当的坐标系以避免对柱坐标下 ξ_3 以及球坐标下 ξ_2 和 ξ_3 的导数计算。因此,本文将基于柱坐标下 ξ_1, ξ_2 方向以及球坐标下 ξ_3 方向的导数形式,对式(7)~式(9)关于柱坐标和球坐标下的数值格式进行理论推导。

1.2.2 柱坐标系下的格式推导

对散度项,结合式(12)和式(15),可得到

$$\begin{aligned} {}^i\langle \nabla \cdot \mathbf{V}(\boldsymbol{\xi}) \rangle &= \frac{1}{i\xi_1} \sum_{j=1}^N b_j [{}^j\xi_1 \mathbf{V}({}^j\boldsymbol{\xi}) - {}^i\xi_1 \mathbf{V}({}^i\boldsymbol{\xi})] \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})} = \\ &\sum_{j=1}^N b_j [({}^j\xi_1 / {}^i\xi_1)^{0.5 \times 2} \mathbf{V}({}^j\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{V}({}^i\boldsymbol{\xi})] \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})} \end{aligned} \tag{21}$$

对拉普拉斯算符,利用 1 阶小量的近似关系(其近似误差为 2 阶小量)

$$1 + \frac{1}{2} ({}^j\xi_1 - {}^i\xi_1) / {}^i\xi_1 \approx [1 + ({}^j\xi_1 - {}^i\xi_1) / {}^i\xi_1]^{\frac{1}{2}} = ({}^j\xi_1 / {}^i\xi_1)^{\frac{1}{2}} \tag{22}$$

并结合式(14)和式(16),可得到

$$\begin{aligned} {}^i\langle \Delta f(\boldsymbol{\xi}) \rangle &= {}^i\left\langle \frac{1}{\xi_1} \nabla \cdot [\xi_1 \nabla f(\boldsymbol{\xi})] \right\rangle = \\ &\frac{1}{i\xi_1} \sum_{j=1}^N b_j ({}^i\xi_1 + {}^j\xi_1) [f({}^i\boldsymbol{\xi}) - f({}^j\boldsymbol{\xi})] (\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})}) / \mathbf{r}_{ij}^2 = \\ &\sum_{j=1}^N 2b_j \left[1 + \frac{1}{2} ({}^j\xi_1 - {}^i\xi_1) / {}^i\xi_1 \right] [f({}^i\boldsymbol{\xi}) - f({}^j\boldsymbol{\xi})] (\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})}) / \mathbf{r}_{ij}^2 \approx \\ &\sum_{j=1}^N 2b_j ({}^j\xi_1 / {}^i\xi_1)^{\frac{1}{2}} [f({}^i\boldsymbol{\xi}) - f({}^j\boldsymbol{\xi})] (\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})}) / \mathbf{r}_{ij}^2 = \\ &\sum_{j=1}^N 2b_j [f({}^i\boldsymbol{\xi}) - f({}^j\boldsymbol{\xi})] [({}^i\xi_1 / {}^j\xi_1)^{0.5 \times 1} \mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})}] / \mathbf{r}_{ij}^2 \end{aligned} \tag{23}$$

对耗散项,忽略 2 阶小量 $[\lambda({}^j\boldsymbol{\xi}) - \lambda({}^i\boldsymbol{\xi})][{}^j\xi - {}^i\xi] / {}^i\xi$,同时将 1 阶小量前面的系数做如下近似(由此带来的近似误差也为 2 阶小量)

$$\lambda({}^j\boldsymbol{\xi}) / [\lambda({}^i\boldsymbol{\xi}) + \lambda({}^j\boldsymbol{\xi})] \approx 1/2 \tag{24}$$

并结合式(14)和式(17),可得到

$$\begin{aligned} {}^i\langle \nabla \cdot [\lambda(\boldsymbol{\xi}) \nabla \phi(\boldsymbol{\xi})] \rangle &= {}^i\left\langle \frac{1}{\xi_1} \nabla \cdot [\xi_1 \lambda(\boldsymbol{\xi}) \nabla \phi(\boldsymbol{\xi})] \right\rangle = \\ &\frac{1}{i\xi_1} \sum_{j=1}^N b_j [{}^i\xi_1 \lambda({}^i\boldsymbol{\xi}) + {}^j\xi_1 \lambda({}^j\boldsymbol{\xi})] [\phi({}^i\boldsymbol{\xi}) - \phi({}^j\boldsymbol{\xi})] (\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})}) \approx \\ &\sum_{j=1}^N b_j [\lambda({}^i\boldsymbol{\xi}) + \lambda({}^j\boldsymbol{\xi}) + \lambda({}^i\boldsymbol{\xi}) ({}^j\xi_1 - {}^i\xi_1) / {}^i\xi_1] [\phi({}^i\boldsymbol{\xi}) - \phi({}^j\boldsymbol{\xi})] (\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})}) \approx \\ &\sum_{j=1}^N b_j \left[1 + \frac{1}{2} ({}^j\xi_1 - {}^i\xi_1) / {}^i\xi_1 \right] [\lambda({}^i\boldsymbol{\xi}) + \lambda({}^j\boldsymbol{\xi})] [\phi({}^i\boldsymbol{\xi}) - \phi({}^j\boldsymbol{\xi})] (\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})}) \approx \\ &\sum_{j=1}^N b_j [\lambda({}^i\boldsymbol{\xi}) + \lambda({}^j\boldsymbol{\xi})] [\phi({}^i\boldsymbol{\xi}) - \phi({}^j\boldsymbol{\xi})] [({}^i\xi_1 / {}^j\xi_1)^{0.5 \times 1} \mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})}] \end{aligned} \tag{25}$$

考虑到柱坐标下关于 ξ_2 的导数计算与直角坐标系相同,且不涉及关于 ξ_3 的导数计算,可根据式(21)、式(23)和式(25)进一步得到式(7)~式(9)中对应于柱坐标系的具体表达式。

1.2.3 球坐标系下的格式推导

对散度项,结合式(12)和式(18),可得到

$$\begin{aligned} {}^i\langle \nabla \cdot \mathbf{V}(\boldsymbol{\xi}) \rangle &= \frac{1}{i\xi_1^2} \sum_{j=1}^N b_j [{}^j\xi_1^2 \mathbf{V}({}^j\boldsymbol{\xi}) - {}^i\xi_1^2 \mathbf{V}({}^i\boldsymbol{\xi})] \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})} = \\ &\sum_{j=1}^N b_j [({}^j\xi_1 / {}^i\xi_1)^{1.0 \times 2} \mathbf{V}({}^j\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{V}({}^i\boldsymbol{\xi})] \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{RKPM})} \end{aligned} \tag{26}$$

对拉普拉斯算符,利用 1 阶小量的近似关系(其近似误差为 2 阶小量)

$$1 + \frac{1}{2} ({}^j\xi_1^2 - {}^i\xi_1^2) / {}^i\xi_1^2 \approx [1 + ({}^j\xi_1^2 - {}^i\xi_1^2) / {}^i\xi_1^2]^{\frac{1}{2}} = ({}^j\xi_1^2 / {}^i\xi_1^2)^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

并结合式(14)和式(19),可得到

$$\begin{aligned} \langle \Delta f(\xi) \rangle &= \langle \frac{1}{\xi_1^2} \nabla \cdot [\xi_1^2 \nabla f(\xi)] \rangle = \frac{1}{\xi_1^2} \sum_{j=1}^N b_j (\xi_1^2 + j \xi_1^2) [f(i\xi) - f(j\xi)] (r_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(RKPM)}) / r_{ij}^2 = \\ &= \sum_{j=1}^N 2b_j \left[1 + \frac{1}{2} (j \xi_1^2 - i \xi_1^2) / \xi_1^2 \right] [f(i\xi) - f(j\xi)] (r_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(RKPM)}) / r_{ij}^2 \approx \\ &= \sum_{j=1}^N 2b_j (j \xi_1^2 / i \xi_1^2)^{\frac{1}{2}} [f(i\xi) - f(j\xi)] (r_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(RKPM)}) / r_{ij}^2 = \\ &= \sum_{j=1}^N 2b_j [f(i\xi) - f(j\xi)] [(j \xi_1 / i \xi_1)^{1.0 \times 1} r_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(RKPM)}] / r_{ij}^2 \end{aligned} \tag{28}$$

对耗散项,结合式(14)和式(20)并仿照式(25)的推导过程,可得到

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot [\lambda(\xi) \nabla \phi(\xi)] \rangle &= \langle \frac{1}{\xi_1^2} \nabla \cdot [\xi_1^2 \lambda(\xi) \nabla \phi(\xi)] \rangle = \\ &= \frac{1}{\xi_1^2} \sum_{j=1}^N b_j [\xi_1^2 \lambda(i\xi) + j \xi_1^2 \lambda(j\xi)] [\phi(i\xi) - \phi(j\xi)] (r_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(RKPM)}) \approx \\ &= \sum_{j=1}^N b_j [\lambda(i\xi) + \lambda(j\xi) + \lambda(j\xi) (j \xi_1^2 - i \xi_1^2) / i \xi_1^2] [\phi(i\xi) - \phi(j\xi)] (r_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(RKPM)}) \approx \\ &= \sum_{j=1}^N b_j \left[1 + \frac{1}{2} (j \xi_1^2 - i \xi_1^2) / i \xi_1^2 \right] [\lambda(i\xi) + \lambda(j\xi)] [\phi(i\xi) - \phi(j\xi)] (r_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(RKPM)}) \approx \\ &= \sum_{j=1}^N b_j [\lambda(i\xi) + \lambda(j\xi)] [\phi(i\xi) - \phi(j\xi)] [(j \xi_1 / i \xi_1)^{1.0 \times 1} r_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}^{(RKPM)}] \end{aligned} \tag{29}$$

考虑到球坐标下不涉及关于 ξ_2 和 ξ_3 的导数计算,可根据式(26)、式(28)和式(29)进一步得到式(7)~式(9)中对应于球坐标系的具体表达式。

2 收敛性分析方法

由于对函数及其导数的近似估计无需迭代计算和时间推进求解,计算过程没有不稳定问题,因而数值格式的相容性和收敛性在这里是等价的,收敛性分析成为本文程序验证的主要内容。

数值格式的收敛指的是离散方程的精确解能够随离散尺度趋零而逼近于数学模型的精确解。本文涉及的算法并未包含对微分方程的完整求解过程,故将数值格式的收敛理解为数值格式的精确解能够随离散尺度趋零而逼近对应的数学模型精确解。

令 h 泛指离散尺度, u_h 表示数值格式的精确解, u_* 表示数学模型的精确解,则离散误差 ϵ_h 为

$$\epsilon_h = u_h - u_* \tag{30}$$

数值格式的收敛可表示为

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_h = 0 \tag{31}$$

本文的数值格式不涉及迭代计算,舍入误差也可忽略不计。因此,将按照数值格式和数学模型得到的计算结果分别视作 u_h 和 u_* ,并简称为数值解和精确解。

由文献[4],数值解可基于收敛极限进行泰勒展开

$$\begin{aligned} u_h &= u_{h=0} + \frac{\partial u}{\partial h} \Big|_{h=0} h + \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} \Big|_{h=0} \frac{h^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial h^3} \Big|_{h=0} \frac{h^3}{6} + O(h^4) \end{aligned} \tag{32}$$

对收敛的数值格式, $u_{h=0} = u_*$ 。当收敛精度等级为 p 时,低于 p 阶的误差项为零,则有

$$\epsilon_h = g_p h^p + O(h^{p+1}) \tag{33}$$

针对粗离散尺度 (h_{coarse}) 和细离散尺度 (h_{fine}),令尺度比为

$$\eta = h_{\text{coarse}} / h_{\text{fine}} \tag{34}$$

则可由式(33)得到收敛精度等级的后验估计为

$$\hat{p} \approx \ln(\epsilon_{qh} / \epsilon_h) / \ln \eta \tag{35}$$

设 Δ 为计算域内目标函数或导数的最大绝对值,本文通过误差范数 $\|\epsilon_h\|$ 和相对误差 $\|\tilde{\epsilon}_h\| = \|\epsilon_h\| / \Delta$ 来评估误差大小和精度等级。如计算域有 M 个离散单元,则

$$\|\epsilon_h\| = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |u_{hi} - u_{*i}| \tag{36}$$

在渐近收敛区内,用 $\|\epsilon_h\|$ 代替 ϵ_h 并略去高阶项,可由式(33)得到近似线性关系

$$\ln \|\epsilon_h\| \approx \ln \|g_p\| + p \ln h \tag{37}$$

用误差范数代替上式中的离散误差,则得到收敛精度等级的一般表达式

$$\hat{p} \approx \ln(\|\epsilon_{qh}\| / \|\epsilon_h\|) / \ln \eta \tag{38}$$

只有当离散尺度小到一定程度而使数值计算进入离散尺度的渐近收敛区,式(32)右端主要展开项不发生正负号的改变时,基于式(37)和式

(38)的分析结果才有可能合理的。

收敛性分析可依次采用以下 3 条技术途径:

- 1) 选取不同函数形式和适当离散尺度,通过数值解与精确解的一致性来检验算法的正确性。
- 2) 在充分小的离散尺度下,通过 $\ln \|\epsilon_h\|$ 和 $\ln h$ 之间的线性关系来判断计算格式的收敛性。
- 3) 基于渐近收敛区内两个离散尺度下的误差范数和尺度比获取格式收敛的精度等级。

进行程序验证时,需要尝试多种函数形式,这样才能获得充足证据来说明数值算法和程序代码的正确性。因篇幅所限,本文只列出特定函数的量化分析结果。

3 一维模型的程序验证

3.1 一维模型的原函数及计算参数

对一维模型,所选的原函数如式 (39)~式 (42),坐标变量的取值范围为 $0 \leq \xi_1 \leq 1.0$ 。

$f(\xi_1) = \xi_1^2 \sin(2.5\pi\xi_1)$ (39)

$\lambda(\xi_1) = \sin(6\pi\xi_1)$ (40)

$\phi(\xi_1) = \cos(2.5\pi\xi_1)$ (41)

$V_1(\xi_1) = \xi_1^2 \sin(2.5\pi\xi_1)$ (42)

其中 $V_1(\xi_1)$ 表示矢量函数 $\mathbf{V}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 在一维情况下的第 1 个分量。

本文采用核估计无网格方法,对核函数施用最低阶的校正函数,即校正阶 $n_c=0$ 。数值计算

的离散尺度 h_1, h_2, h_3 和 h_4 分别对应微元线总数为 50, 100, 200 和 400 的离散方案, l_1, l_2, l_3 和 l_4 为对应的支撑域尺度。一维模型采用较小的支撑域尺度因子 $\delta = l_i/h_i = 1.0, i = 1 \sim 4$, 支撑域内仅有左、右两个近邻微元线。计算参数如表 1 所示。

3.2 一维模型的一致性评估

图 1~图 3 为基于所选原函数且对应 $h=h_1$ 和表 1 中其他计算参数的数值计算结果。通过任意原函数的数值试验表明,在适当离散尺度下,一维模型的数值解与精确解均能表现出很好的一致性。

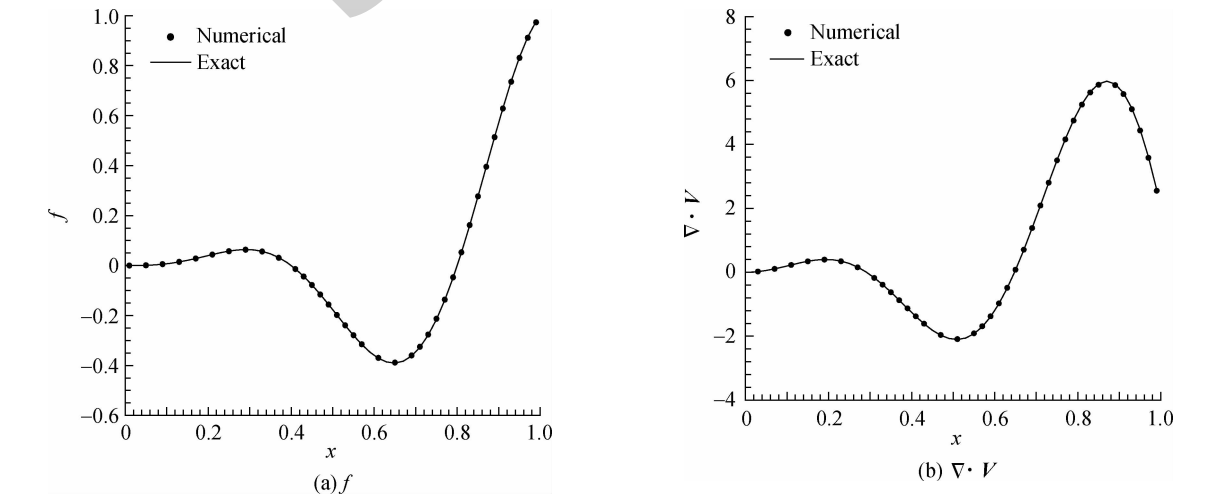
3.3 一维模型的收敛性评估

收敛性评估包含两项基本内容:其一是评价数值格式是否收敛;其二是评估收敛的精度等级。数值计算的离散尺度不可能为零,但当离散尺度小到一定程度而使数值计算处于渐近收敛区时,误差范数和离散尺度的对数将呈现式 (37) 所示的线性关系,可据此判断计算格式的收敛性,并通过式 (38) 量化数值收敛的精度等级。

从图 4 可以看到,一维模型的误差范数和离散尺度在对数坐标中近似呈线性关系。表 2 列出了误差范数 $\|\epsilon_h\|$ 和收敛精度等级 $\hat{p}$ 的量化结果,其中 $\hat{p}$ 的计算信息来自 $\|\epsilon_{h=0.005}\|, \|\epsilon_{h=0.0025}\|$ 以及 $\eta=2$ 。

表 1 一维模型的计算参数
Table 1 Computation parameters of one-dimensional model

n_c	δ	h_1	h_2	h_3	h_4	l_1	l_2	l_3	l_4
0	1.0	0.02	0.01	0.005	0.0025	δh_1	δh_2	δh_3	δh_4



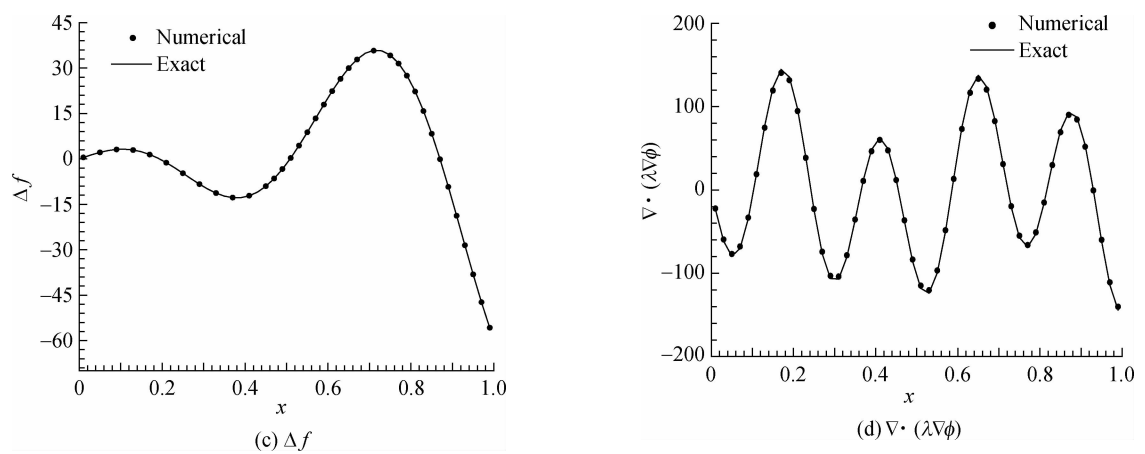


图 1 直角坐标系下一维模型的数值计算结果
Fig. 1 Numerical results of one-dimensional model with Cartesian coordinates

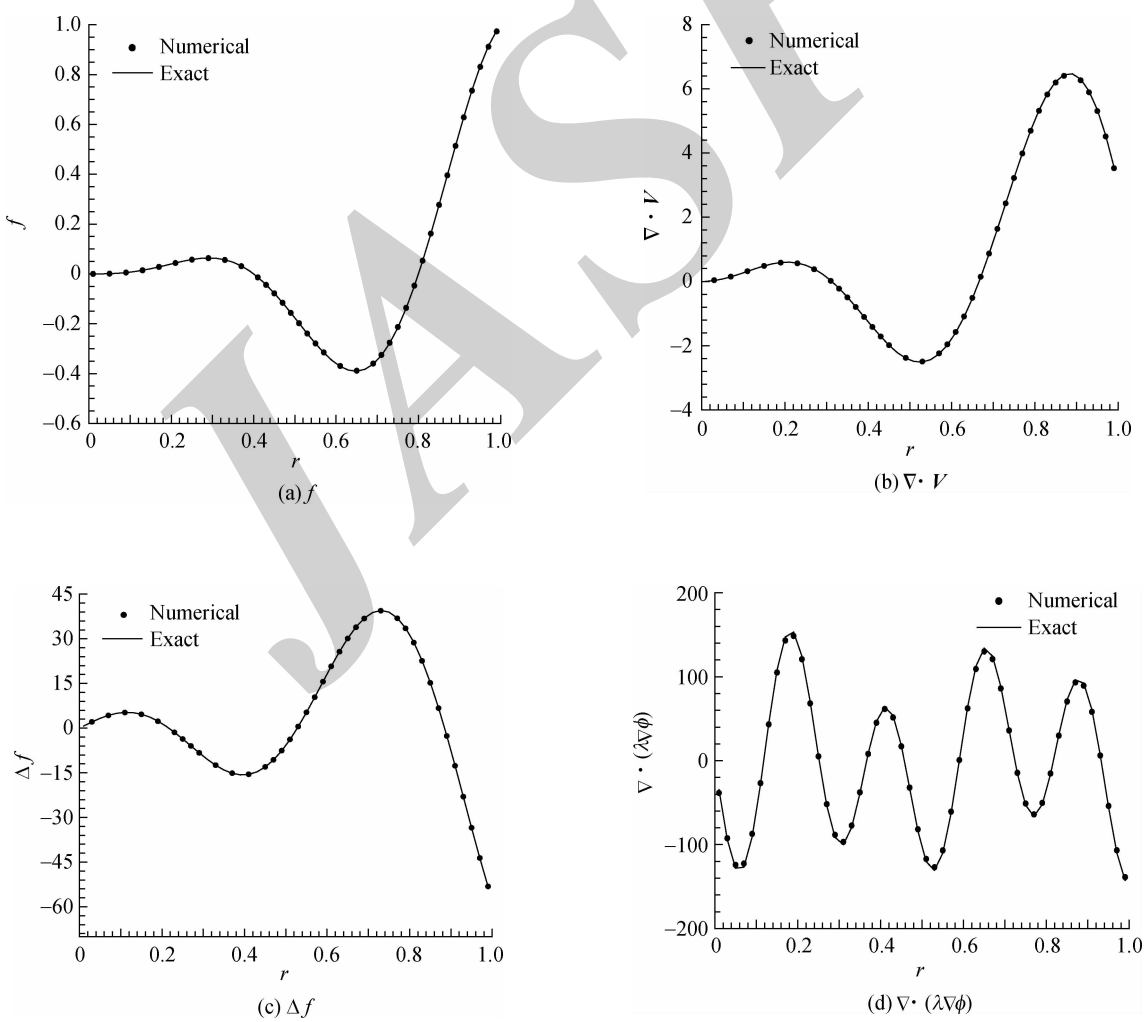


图 2 柱面坐标系下一维模型的数值计算结果
Fig. 2 Numerical results of one-dimensional model with cylindrical coordinates

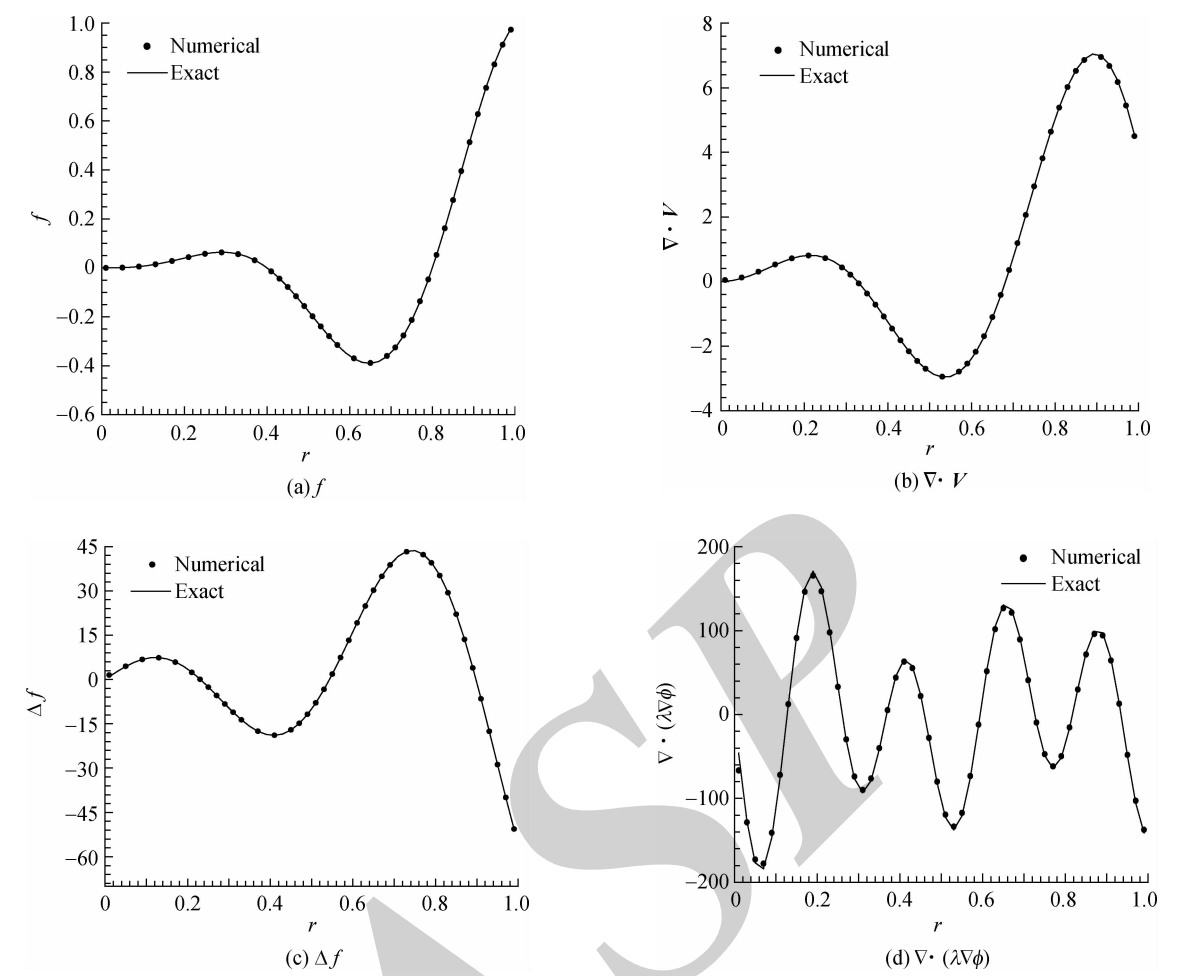


图 3 球面坐标系下一维模型的数值计算结果

Fig. 3 Numerical results of one-dimensional model with spherical coordinates

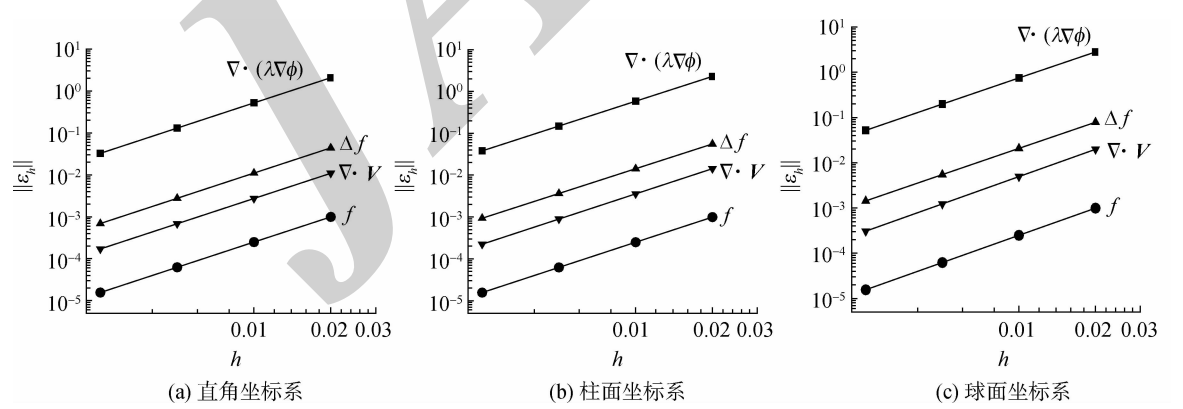


图 4 一维模型误差范数与离散尺度的关系

Fig. 4 Relationship between error norms and discretization scales of one-dimensional model

表 2 一维模型的误差范数和收敛精度等级

Table 2 Error norms and convergence accuracy orders of one-dimensional model

计算对象	坐标系	$\ \epsilon_{h=0.02}\ $	$\ \epsilon_{h=0.01}\ $	$\ \epsilon_{h=0.005}\ $	$\ \epsilon_{h=0.0025}\ $	$\ \epsilon_{h=0.01}\ /\%$	$\hat{p}$
f	直角	9.925×10^{-4}	2.493×10^{-4}	6.234×10^{-5}	1.559×10^{-5}	0.025	1.99954
	柱面	9.925×10^{-4}	2.493×10^{-4}	6.234×10^{-5}	1.559×10^{-5}	0.025	1.99954
	球面	9.925×10^{-4}	2.493×10^{-4}	6.234×10^{-5}	1.559×10^{-5}	0.025	1.99954

续表

计算对象	坐标系	$\ \epsilon_{h=0.02}\ $	$\ \epsilon_{h=0.01}\ $	$\ \epsilon_{h=0.005}\ $	$\ \epsilon_{h=0.0025}\ $	$\ \tilde{\epsilon}_{h=0.01}\ /\%$	$\hat{p}$
Δf	直角	4.398×10^{-2}	1.103×10^{-2}	2.759×10^{-3}	6.900×10^{-4}	0.019	1.99948
	柱面	5.551×10^{-2}	1.424×10^{-2}	3.646×10^{-3}	9.328×10^{-4}	0.025	1.96667
	球面	7.855×10^{-2}	2.077×10^{-2}	5.469×10^{-3}	1.435×10^{-3}	0.038	1.93023
$\nabla\cdot\mathbf{V}$	直角	1.091×10^{-2}	2.728×10^{-3}	6.821×10^{-4}	1.705×10^{-4}	0.046	2.00021
	柱面	1.425×10^{-2}	3.567×10^{-3}	8.919×10^{-4}	2.230×10^{-4}	0.055	1.99984
	球面	1.985×10^{-2}	4.940×10^{-3}	1.231×10^{-3}	3.072×10^{-4}	0.070	2.00258
$\nabla\cdot(\lambda\nabla\phi)$	直角	2.075	0.5212	0.1304	3.262×10^{-2}	0.359	1.99912
	柱面	2.286	0.5848	0.1492	3.794×10^{-2}	0.377	1.97546
	球面	2.806	0.7482	0.1978	5.199×10^{-2}	0.438	1.92773

4 二维模型的程序验证

4.1 二维模型的原函数及计算参数

二维模型选择式(43)~式(47)所示的原函数,坐标变量的取值范围为 $0\leqslant\xi_1\leqslant1.0,0\leqslant\xi_2\leqslant0.5$ 。数值计算涉及直角和柱面两种坐标系,计算参数如表3。

$f(\xi_1,\xi_2)=\cos(2\pi\xi_1)\sin(6\pi\xi_2)$ (43)

$\lambda(\xi_1,\xi_2)=\sin[4\pi(\xi_1+\xi_2)]$ (44)

$\phi(\xi_1,\xi_2)=\cos(2\pi\xi_1\xi_2)$ (45)

$V_1(\xi_1,\xi_2)=\sin(2\pi\xi_1)\cos(2\pi\xi_2)$ (46)

$V_2(\xi_1,\xi_2)=\cos(2\pi\xi_1)\sin(6\pi\xi_2)$ (47)

式中 $V_1(\xi_1,\xi_2)$ 和 $V_2(\xi_1,\xi_2)$ 表示矢量函数 $\mathbf{V}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 在二维情况下的前两个分量。

4.2 二维模型的一致性评估

图5~图6为基于所选原函数且对应 $h=h_1$ 和表3中其他计算参数的数值计算结果。在二维情况下,借助等值线的逼近程度来表示数值解与精确解的一致性。通过任意原函数的数值试验表明,在适当离散尺度下,二维模型的数值解与精确解均能表现出很好的一致性。

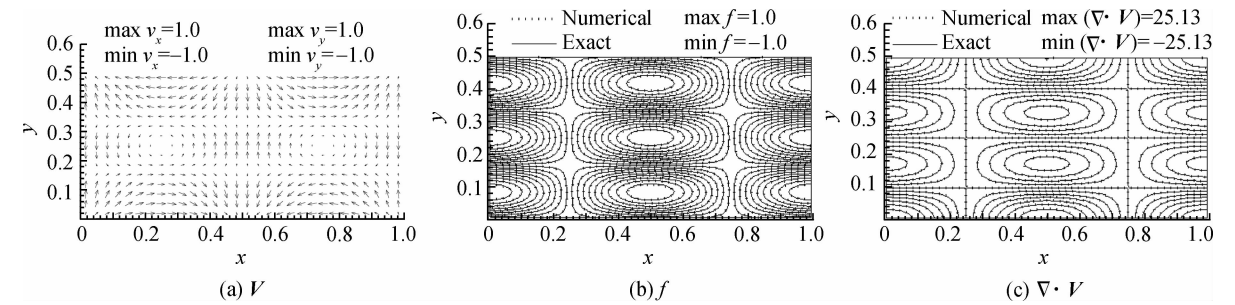
4.3 二维模型的收敛性评估

从图7可以看到,二维模型的误差范数和离散尺度在对数坐标中近似呈线性关系。表4列出了误差范数 $\|\epsilon_h\|$ 和收敛精度等级 $\hat{p}$ 的量化结果,其中 $\hat{p}$ 的计算信息来自 $\|\epsilon_{h=0.0067}\|,\|\epsilon_{h=0.005}\|$ 以及 $\eta=1.34$ 。

表 3 二维模型的计算参数

Table 3 Computation parameters of two-dimensional model

n_c	δ	h_1	h_2	h_3	h_4	l_1	l_2	l_3	l_4
0	1.5	0.02	0.01	0.0067	0.005	δh_1	δh_2	δh_3	δh_4



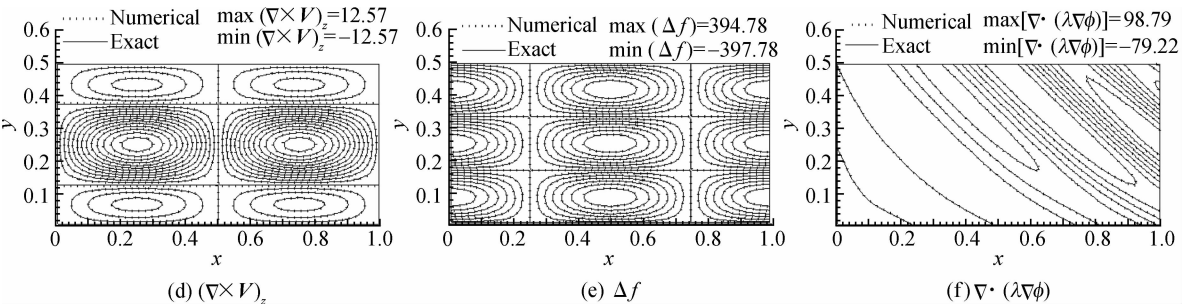


图 5 直角坐标系下二维模型的数值计算结果

Fig. 5 Numerical results of two-dimensional model with Cartesian coordinates

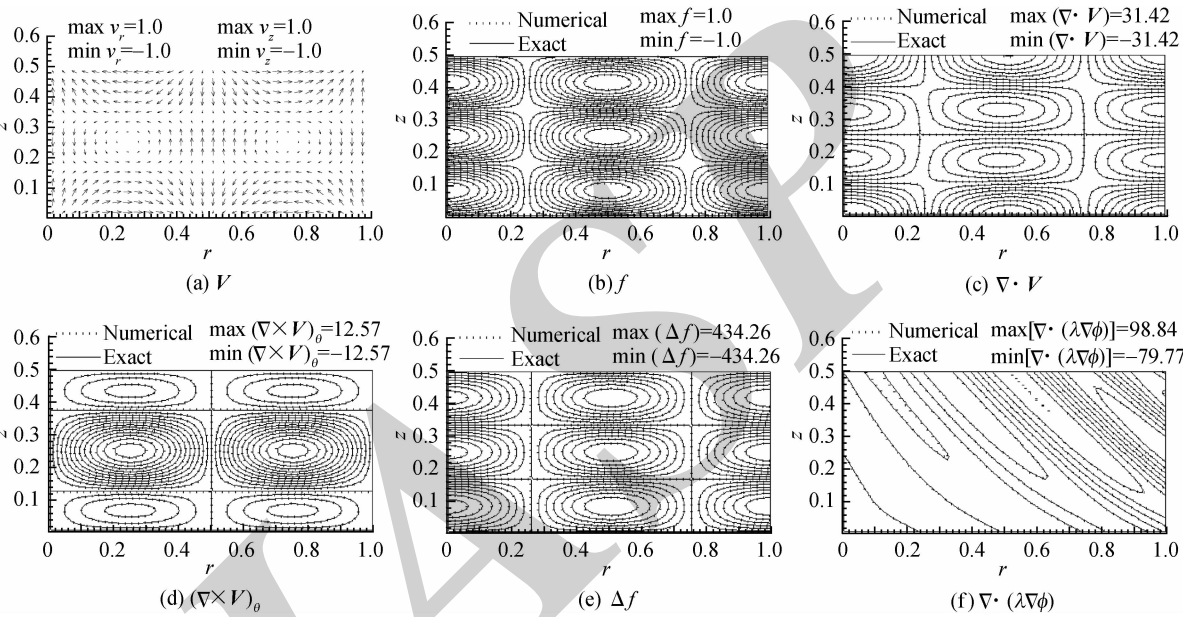


图 6 柱面坐标系下二维模型的数值计算结果

Fig. 6 Numerical results of two-dimensional model with cylindrical coordinates

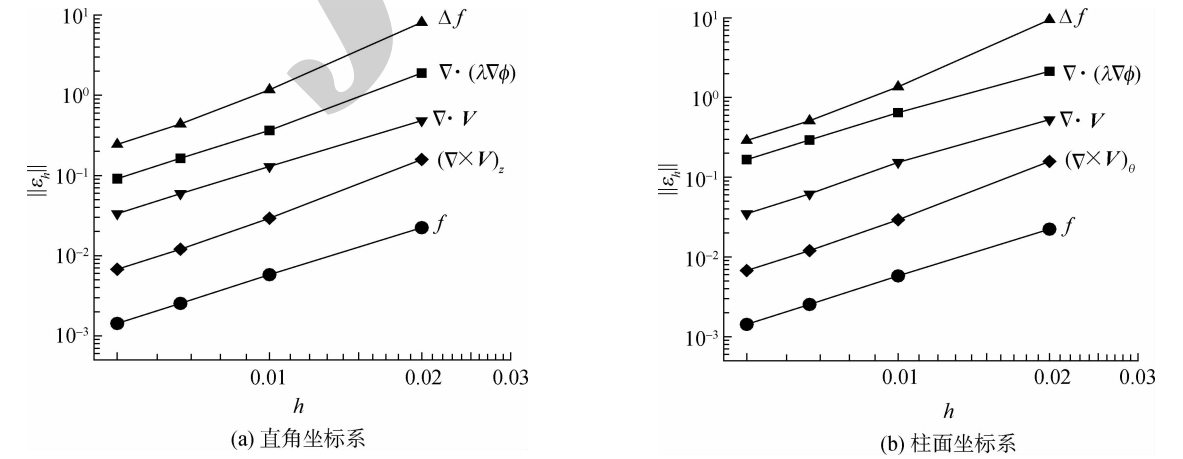


图 7 二维模型误差范数与离散尺度的关系

Fig. 7 Relationship between error norms and discretization scales of two-dimensional model

表 4 二维模型的误差范数和收敛精度等级

Table 4 Error norms and convergence accuracy orders of two-dimensional models

计算对象	坐标系	$\ \epsilon_{h=0.02}\ $	$\ \epsilon_{h=0.01}\ $	$\ \epsilon_{h=0.0067}\ $	$\ \epsilon_{h=0.005}\ $	$\ \tilde{\epsilon}_{h=0.01}\ /\%$	$\hat{p}$
f	直角	2.234×10^{-2}	5.792×10^{-3}	2.539×10^{-3}	1.428×10^{-3}	0.597	2.00045
	柱面	2.234×10^{-2}	5.792×10^{-3}	2.539×10^{-3}	1.428×10^{-3}	0.597	2.00045
Δf	直角	8.113	1.169	0.4385	0.2438	0.296	2.04049
	柱面	9.461	1.364	0.5116	0.2893	0.314	1.98165
$\nabla\cdot\mathbf{V}$	直角	0.4829	0.1296	5.933×10^{-2}	3.340×10^{-2}	0.516	1.99722
	柱面	0.5288	0.1537	6.184×10^{-2}	3.494×10^{-2}	0.489	1.98472
$[\nabla\times\mathbf{V}]_{\xi_3}$	直角	0.1581	2.929×10^{-2}	1.203×10^{-2}	6.765×10^{-3}	0.233	2.00097
	柱面	0.1581	2.929×10^{-2}	1.203×10^{-2}	6.765×10^{-3}	0.233	2.00097
$\nabla\cdot(\lambda\nabla\phi)$	直角	1.892	0.3649	0.1638	9.121×10^{-2}	0.369	2.03519
	柱面	2.137	0.6469	0.2939	0.1664	0.650	1.97751

5 三维模型的程序验证

5.1 三维模型的原函数及计算参数

三维模型选择式(48)~式(53)的原函数,坐标变量的取值范围为 $0\leqslant\xi_1\leqslant1.0, 0\leqslant\xi_2\leqslant1.0, 0\leqslant\xi_3\leqslant1.0$ 。数值计算仅涉及直角坐标系,计算参数如表 5,其中有两个支撑域尺度因子。

$f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\sin(2\pi\xi_1\xi_2\xi_3)$ (48)

$\lambda(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\sin[2\pi(\xi_1+\xi_2+\xi_3)]$ (49)

$\phi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\sin(2\pi\xi_1\xi_2\xi_3)$ (50)

$V_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\sin[2\pi(\xi_1+\xi_2)]$ (51)

$V_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\sin[2\pi(\xi_2+\xi_3)]$ (52)

$V_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\sin[2\pi(\xi_3+\xi_1)]$ (53)

其中 $V_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3), V_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 和 $V_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 表示矢量函数 $\mathbf{V}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 的 3 个分量。

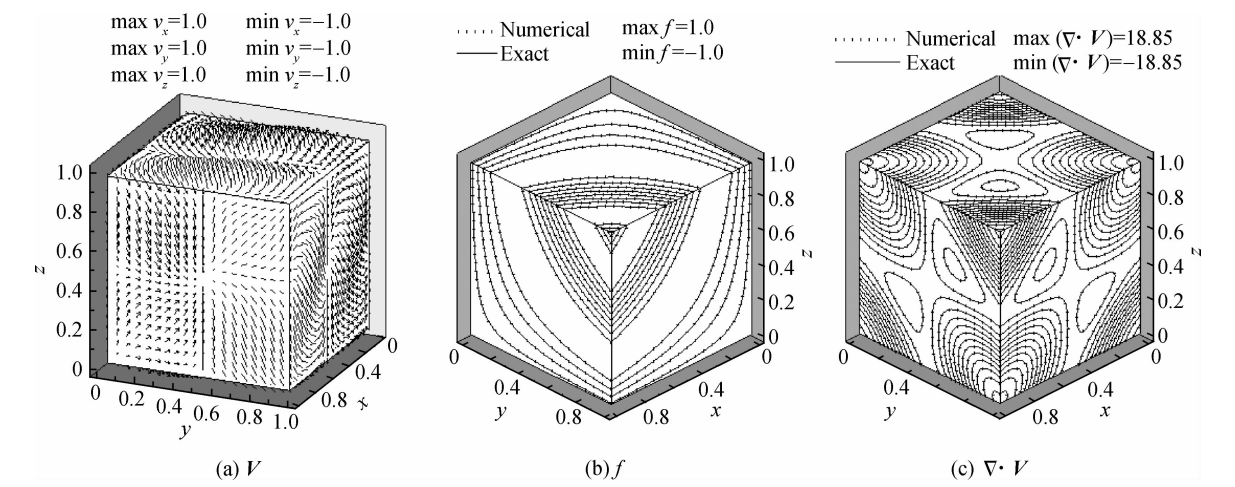
5.2 三维模型的一致性评估

图 8 为基于所选原函数且对应 $h=h_1, \delta=\delta_1$ 及表 5 中其他计算参数的数值计算和精确解对比

表 5 三维模型的计算参数

Table 5 Computation parameters of three-dimensional model

n_c	δ_1	δ_2	δ_3	h_1	h_2	h_3	h_4	l_1	l_2	l_3	l_4
0	1.5	2.0	2.5	0.02	0.0125	0.01	0.008	δh_1	δh_2	δh_3	δh_4



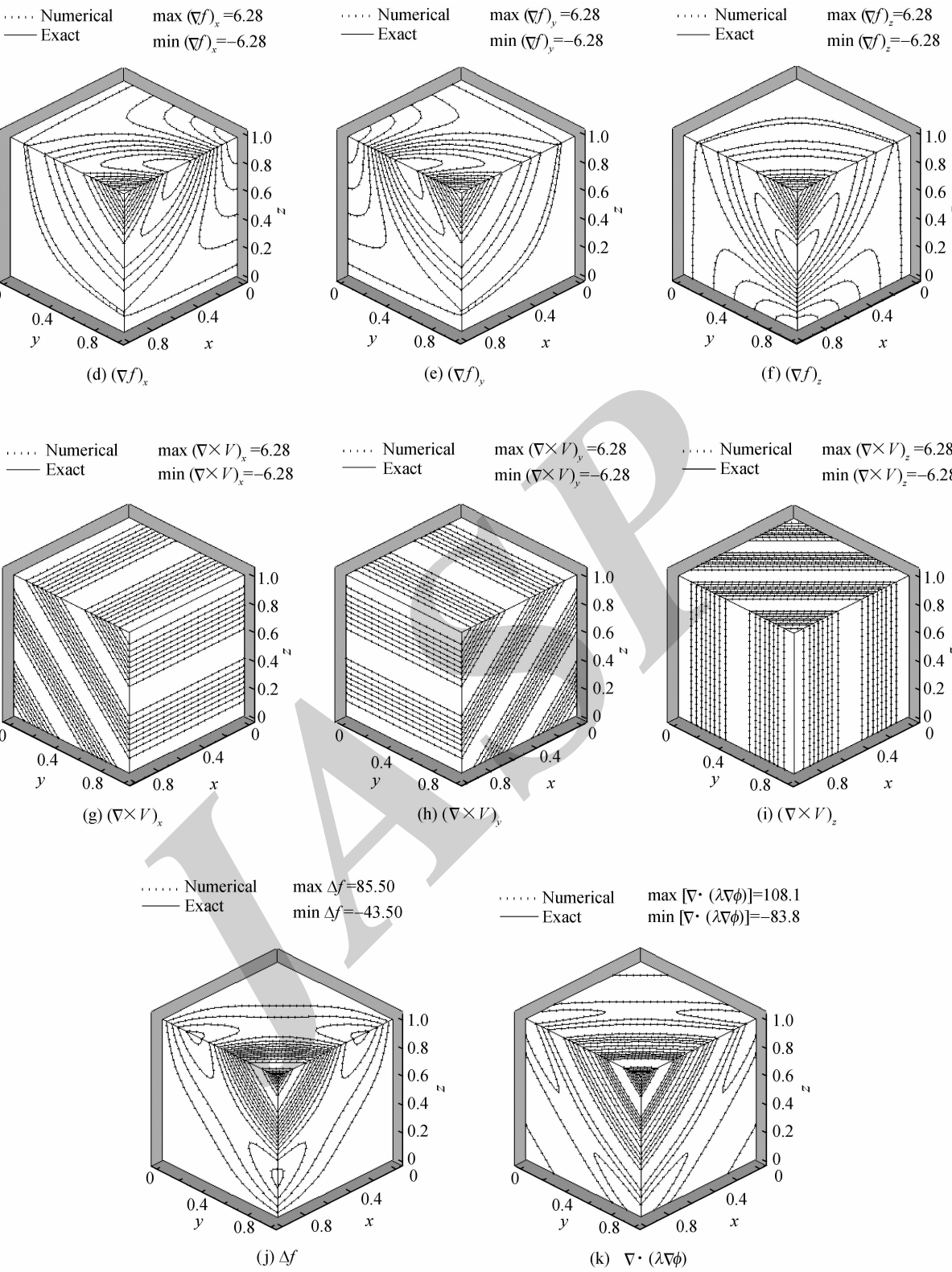


图 8 直角坐标系下三维模型的数值计算结果

Fig. 8 Numerical results of three-dimensional model with Cartesian coordinates

结果。通过任意原函数的数值试验表明,在适当离散尺度下,三维模型的数值解与精确解均能表现出很好的一致性。

5.3 三维模型的收敛性评估

从图 9 可以看到,三维模型的误差范数和离散尺度在对数坐标中近似呈线性关系。表 6 列出

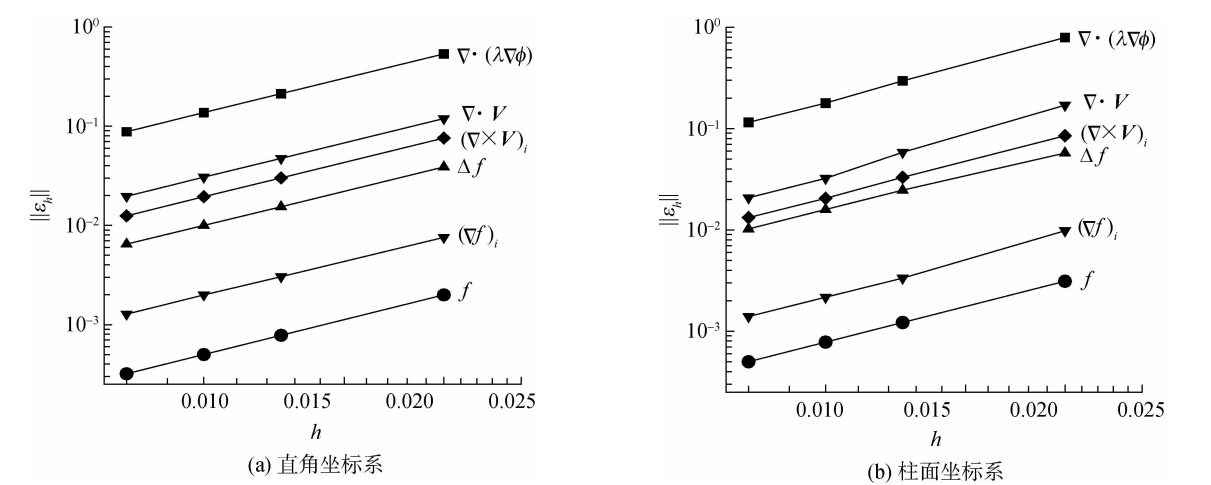


图 9 三维模型误差范数与离散尺度的关系

Fig. 9 Relationship between error norms and discretization scales of three-dimensional model

表 6 三维模型的误差范数和收敛精度等级

Table 6 Error norms and convergence accuracy orders of three-dimensional model

计算对象	δ	$\ \epsilon_{h=0.02}\ $	$\ \epsilon_{h=0.0125}\ $	$\ \epsilon_{h=0.01}\ $	$\ \epsilon_{h=0.008}\ $	$\ \tilde{\epsilon}_{h=0.01}\ /\%$	$\hat{p}$
f	2.0	1.997×10^{-3}	7.809×10^{-4}	4.999×10^{-4}	3.200×10^{-4}	0.050	1.999 10
	2.5	3.119×10^{-3}	1.220×10^{-3}	7.814×10^{-4}	5.002×10^{-4}	0.078	1.999 07
Δf	2.0	3.888×10^{-2}	1.542×10^{-2}	1.001×10^{-2}	6.486×10^{-3}	0.012	1.944 66
	2.5	5.744×10^{-2}	2.469×10^{-2}	1.593×10^{-2}	1.024×10^{-2}	0.019	1.980 35
$(\nabla f)_i$	2.0	7.582×10^{-3}	3.043×10^{-3}	1.993×10^{-3}	1.276×10^{-3}	0.032	1.998 31
	2.5	9.824×10^{-3}	3.344×10^{-3}	2.168×10^{-3}	1.398×10^{-3}	0.035	1.966 28
$\nabla\cdot V$	2.0	0.119 7	4.748×10^{-2}	3.071×10^{-2}	1.966×10^{-2}	0.163	1.998 72
	2.5	0.170 3	5.842×10^{-2}	3.233×10^{-2}	2.079×10^{-2}	0.172	1.978 65
$(\nabla\times V)_i$	2.0	7.604×10^{-2}	3.014×10^{-2}	1.950×10^{-2}	1.249×10^{-2}	0.311	1.996 41
	2.5	8.502×10^{-2}	3.308×10^{-2}	2.053×10^{-2}	1.324×10^{-2}	0.327	1.965 75
$\nabla\cdot(\lambda\nabla\phi)$	2.0	0.536 3	0.213 2	0.137 5	8.809×10^{-2}	0.127	1.995 42
	2.5	0.792 9	0.296 1	0.178 8	0.115 5	0.165	1.958 37

了误差范数 $\|\epsilon_h\|$ 和收敛精度等级 $\hat{p}$ 的量化结果,其中 $\hat{p}$ 的计算信息来自 $\|\epsilon_{h=0.01}\|$, $\|\epsilon_{h=0.008}\|$ 以及 $\eta=1.25$ 。

6 结 论

用无网格方法对函数及其导数进行近似估计,其计算结果的可信性影响因素有 3 个:其一是数值计算格式;其二是离散尺度;其三是支撑域尺度因子。计算表明,针对任意的函数形式,程序均能给出与原函数及其 1,2 阶导函数相一致的数值结果,验证了计算格式和程序代码的正确性。在不同坐标系和不同空间维数下,当离散尺度 $h=0.01$ 时,对所选函数及其 1 阶导数和 2 阶导数数

值计算的相对误差均不大于 0.65%。根据不同离散尺度下数值结果变化趋势的分析,得到了计算格式具有 2 阶收敛精度的观测结果。数值试验还发现,RKPM 校正函数的阶数以及支撑域尺度因子 δ 的取值对导数估计的误差大小有影响,但不影响收敛的精度等级。对不同的函数形式和空间维数, δ 有一个最佳的取值范围。较大的 δ 可提供较充分的函数分布信息,在离散尺度进一步缩小时能更好地显示计算格式的收敛性。对一定范围内的离散尺度,较小的 δ 产生较小的误差,但当离散尺度小到一定程度时,误差有可能不再依照收敛阶呈规律性递减,出现收敛阻滞。本文的计算格式仅采用了 RKPM 方法的零阶校正函数,

由于该方法基于函数而非导数的相容性估计原则来构造校正函数,当 δ 较小时,支撑域内的近邻点较少,对空间导数的近似估计有可能偏离严格相容所需要的条件,从而导致收敛阻滞。通过改进核函数梯度项的近似估计方法,可进一步提高收敛的精度等级并消除收敛阻止现象。

参考文献:

[1] GINGOLD R A, MONAGHAN J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars [J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1977, 181(3): 375-389.

[2] LUCY L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis[J]. Astronomical Journal, 1977, 82(12): 1013-1024.

[3] ONATE E, IDELSOHN S, ZIENKIEWICZ O C, et al. A finite point method in computational mechanics-application to convective transport and fluid flow [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, 39(22): 3839-3866.

[4] OBERKAMPF W L, ROY C J. Verification and validation in science computing[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010.

[5] ROY C J, OBERKAMPF W L. A comprehensive framework for verification, validation, and uncertainty quantification in scientific computing [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(25/26/27/28): 2131-2144.

[6] MONAGHAN J J, GINGOLD R A. Shock simulation by the particle method SPH [J]. Journal of Computational Physics, 1983, 52(2): 374-389.

[7] PETSCHKE A G, LIBESKY L D. Cylindrical smoothed particle hydrodynamics [J]. Journal of Computational Physics, 1993, 109(1): 76-83.

[8] LIU W K, JUN S, LI S F, et al. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, 38(10): 1655-1679.

[9] LIU W K, JUN S, SIHLING D T, et al. Multiresolution reproducing kernel particle methods for computational fluid dynamics[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1997, 24(12): 1391-1415.

[10] CHEN J K, BERAUN J E, JIH C K. An improvement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics[J]. Computational Mechanics, 1999, 23(4): 279-287.

[11] CAMPBELL J, VIGNJEVIC R, LIBESKY L. A contact algorithm for smoothed particle hydrodynamics[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 184(1): 49-65.

[12] INUTSUKA S. Reformulation of smoothed particle hydrodynamics with Riemann solver[J]. Journal of Computational Physics, 2002, 179(1): 238-267.

[13] ZHANG G M, BATRA R C. Modified smoothed particle hydrodynamics method and its application to transient problems[J]. Computational Mechanics, 2004, 34(2): 137-146.

[14] RAFIEE A, THIAGARAJAN K P. An SPH projection method for simulating fluid-hypoelastic structure interaction[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 198(33/34/35/36): 2785-2795.

[15] XU R, STANSBY P, LAURENCE D. Accuracy and stability in incompressible SPH (ISPH) based on the projection method and a new approach[J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(18): 6703-6725.

[16] YIN J W, MA Z B. Reproducing kernel particle method in smoothed particle hydrodynamics [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2009, 26(4): 553-558.

[17] FEDIR V S, JACK J Y. A smoothed particle hydrodynamics method with approximate Riemann solvers for simulation of strong explosions[J]. Computers and Fluids, 2013, 88(15): 418-429.

[18] LIU W K, JUN S, LI S F, et al. Reproducing kernel particle methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1995, 20(8/9): 1081-1106.

[19] The American Society of Mechanical Engineers. V&V 20-2009 Standard for verification and validation in computational fluid dynamics and heat transfer [S]. New York: ASME, 2009: 1-87.

[20] The American Society of Mechanical Engineers. V&V 10.1-2012 An illustration of the concepts of verification and validation in computational solid mechanics [S]. New York: ASME, 2012: 1-23.

[21] BROOKSHAW L. A method of calculating radiative heat diffusion in particle simulations [J]. Proceedings Astronomical Society of Australia, 1985, 6(2): 207-210.

[22] CLEARY P W, MONAGHAN J J. Conducting modelling using smoothed particle hydrodynamics [J]. Journal of Computational Physics, 1999, 148(1): 227-264.

[23] ZHANG S, MORITA K, FUKUDA K, et al. An improved MPS method for numerical simulations of convective heat transfer problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2006, 51(1): 31-47.

[24] BASA M, QUILAN N, LASTIWKA M. Robustness and accuracy of SPH formulations for viscous flow[J]. International Journal for Numerical Method in Fluids, 2009, 60(10): 1127-1148.

[25] MA Zhibo. Physics evoked cloud method: a versatile systematic method for numerical simulations[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2017, 34(3): 261-272.